Дифференциальное уравнение в частных производных

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Дифференциальное уравнение в частных производных (общеупотребительно сокращение **УРЧП**, также известны как **уравнения математической физики**) — дифференциальное уравнение, содержащее неизвестные функции нескольких переменных и их частные производные.

Содержание

- 1 Примеры
- 2 Решение уравнений математической физики
  - 2.1 Аналитическое решение
    - 2.1.1 Уравнение колебаний
    - 2.1.2 Уравнение диффузии
  - 2.2 Числовое решение
    - 2.2.1 Уравнение колебаний струны
    - 2.2.2 Уравнение диффузии
- 3 См. также
- 4 Ссылки

Примеры

- $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ — уравнение колебаний струны (одномерный аналог волнового уравнения).
- $\frac{\partial}{\partial t} c(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x,t)$ — уравнение диффузии, также называемое *уравнением распространения тепла*.

Обычно рассматривается не просто уравнение, а некоторая краевая задача, представляющая собой само уравнение и некоторое количество *начальных* и/или *краевых* условий.

Теория уравнений в частных производных во многом сложнее и менее развита, чем теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, теоремы существования и единственности для УРЧП доказаны лишь для некоторых специальных классов задач.

Решение уравнений математической физики

Существует два метода решения данного типа уравнений:

- аналитический, при котором результат выводится различными математическими преобразованиями;
- числовой, при котором полученный результат соответствует действительному с заданной точностью, но который требует много рутинных вычислений и, поэтому, выполним только при

помощи вычислительной техники (ЭВМ).

Аналитическое решение

Уравнение колебаний

Уравнение диффузии

Числовое решение

Уравнение колебаний струны

Данный способ решения называется **методом конечных дифференциалов.** Он достаточно просто реализуем при помощи программирования.

Этот метод основан на определении производной функции $y = y(x)$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Если имеется функция $u = u(x,t)$, то частичная производная будет следующая:

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}$$

Так как Δx мы используем достаточно маленький, знаки пределов можно отбросить. Тогда получем следующие выражения:

$$u'_x \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}$$

$$u'_t \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x,t)}{\Delta t}$$

Для удобства в дальнейшем примем следующие обозначения:

$$u(x,t) = u_i^j$$

$$u(x + \Delta x, t) = u_{i+1}^j$$

$$u(x, t + \Delta t) = u_i^{j+1}$$

$\Delta x = h$,
$\Delta t = \tau$

Тогда предыдущие выражения можно записать так: $u'_x \approx \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h}, u'_t \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}$

Эти выражения называют **правыми** дифференциалами. Их можно записать и по-другому: $u'_x \approx \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h}, u'_t \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau}$ - это **левые** дифференциалы.

Просуммировав оба выражения получим следующее:

$$2u'_x \approx \frac{u_i^j - u_{i-1}^j + u_{i+1}^j - u_i^j}{h}$$

$$2u'_t \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1} + u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}$$

из которых следует:

$$2u'_x \approx \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}$$

$$2u'_t \approx \frac{u_i^{j+1} + u_i^{j-1}}{2\tau}$$

Аналогично можно получить и дифференциалы второго порядка:

$$u''_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}$$

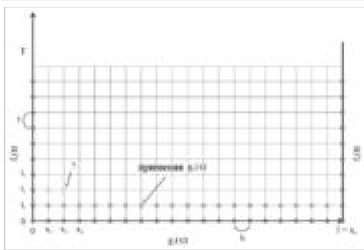
$$u''_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\tau^2}$$

Уравнение колебаний струны записывается в такой форме: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Дополнительные условия задаются в виде: $u\mid_{x=0} = f_1(t)$, $u\mid_{x=l} = f_2(t)$, $u\mid_{t=0} = g_1(x)$, $u\mid_{t=0} = g_2(x)$,

> где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - позиции концов (креплений) струны во времени,
> а $g_1(x)$ и $g_2(x)$ - начальное состояние и скорость струны из которой мы можем получить состояние струны в следующий момент времени по формуле

$$u_i^{j+1} = \tau \cdot g_2(x) + u_i^j.$$



Сетка значений функции

В вычислениях используют дискретизацию струны (разделяют её на одинаковые интервалы, длина которых h (см.рис).

Значения функции остальным x и t можно вычислить из уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

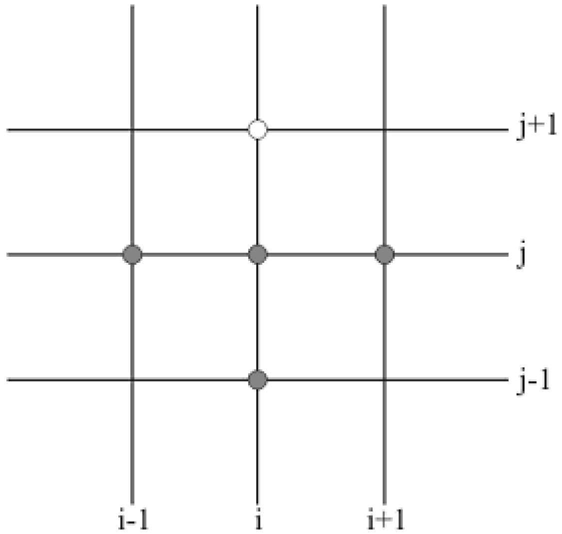
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$u_i^{j+1} = \frac{\tau^2 a^2}{h^2}\left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right) + 2u_i^j - u_i^{j-1}$$

Таким образом, мы получили схему, по которой можно получить значения функции для любых *x* и *t*, используя значения функции при предыдущих *x* и *t*. Схематично это можно представить так:



Этот метод даёт приближённый ответ, степень точности $\Theta(\tau^2 + h^2)$. Для достаточно точных результатов необходимо использовать интервалы $h < 0.1$ и $\tau \leq \frac{h^2}{2}$.

Уравнение диффузии

См. также

- Обыкновенные дифференциальные уравнения

Ссылки

- Материалы по УрЧП на сайте "Учитесь.ру" (http://www.uchites.ru/urchp)
- Станислав Николаевич Кружков - работы по нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных
- Программа, по XML-описанию краевой задачи для уравнения с частными производными, строящая программу на Си, численно решающую эту задачу (http://www.xmds.org)